6. Mechanik starrer Körper

In diesem Kapitel soll die Mechanik ausgedehnter Körper behandelt werden. Von der Physik her unterscheiden sie sich durch das Auftreten von Rotationen und Drehmomenten.

6.1 Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körper

Bisher haben wir Punktmassen betrachtet, deren Bewegung ausschließlich durch den Ortsvektor und deren Änderung beschrieben werden kann.

Massenpunkt → Beschreibung durch $r(t)$

Für ausgedehnte Körper müsste man jeden einzelnen Punkt durch einen Ortsvektor beschreiben, was gleichbedeutend mit einer unendlichen Zahl von möglichen Ortsvektoren ist. Auf Grund der Starre des Körpers gibt es jedoch feste Beziehung zwischen den Vektoren untereinander, so dass die Bewegung durch eine Überlagerung einer einfachen Translation und einer Rotation beschrieben werden kann.

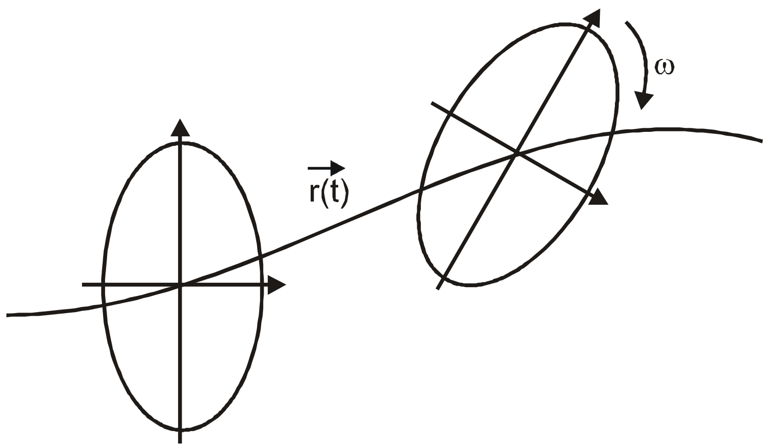

Abbildung 6.1: *Überlagerung einer Translation und Rotation*

Anzahl der Freiheitsgrade

Für ein System mit N Massenpunkten können insgesamt 3N unabhängige Zahlen für die Koordinaten angegeben werden. Das bedeutet, dass für die Translation 3N Freiheitsgrade vorliegen. Werden die Massenpunkte miteinander verkoppelt, so bleiben von den 3N Freiheitsgeraden nur insgesamt 6 Gleichungen übrig.

Anzahl der Freiheitsgrade für die Angabe der Ortsvektoren

→ 3 Freiheitsgrade für die reine Translation
→ 3 Freiheitsgrade für die Rotation

→ insgesamt 6 Freiheitsgrade

6.2 Beschreibung der Drehung und Translation

Annahme: Ein starrer Körper drehe sich zunächst um einen kleinen Winkel $d\varphi$

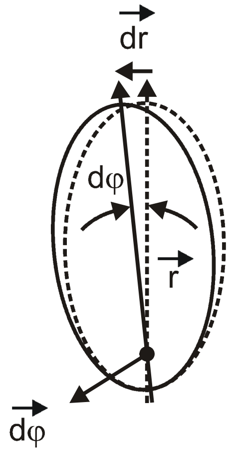

Abbildung 6.2: *Beschreibung einer Drehung*

Bei einer Rotation kann ein beliebiger Punkt auf dem starren Körper durch den Drehwinkel beschrieben werden.

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

Der Drehwinkel wird als Vektor eingeführt, der senkrecht auf der Drehebene steht, wobei die Richtung wie bei einer Schraube in Einschraubrichtung zeigt.

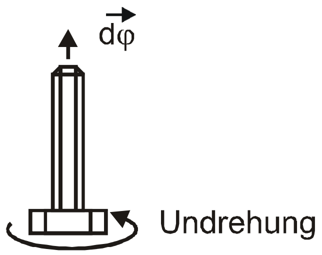

Abbildung 6.3: *Drehwinkel als Vektor*

Die Geschwindigkeit kann direkt durch die Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt werden.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Bei der Überlagerung einer Translation des Drehpunktes folgt die allgemeine Beschreibung der Bewegung.

Rotation und Translation

→ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$

6.3 Dynamik des starren Körpers

Die Ursachen für die Rotation sind nach wie vor die Newton'schen Axiome. Durch die erzwungene Kreisbewegung sind allerdings Phänomene beobachtbar, die bei einer reinen Translation nicht auftreten. Hierdurch zeichnet sich die Rotation im Vergleich zur geradlinigen Bewegung aus.

Die Rotationsenergie

Jede Bewegungsrichtung kann Energie in Form der kinetischen Energie speichern. Für die translatorischen Bewegungen sind diese die 3 Geschwindigkeitsrichtungen v_x, v_y und v_z. Bei der Kreisbewegung muss nun die geradlinige Bewegung in eine Kreisbahn umgerechnet werden. Dies geschieht zunächst durch kleine Massenabschnitte des starren Körpers.

$$W_{rot} \cong \frac{1}{2}\sum \Delta m_i v_i^2$$

Die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte werden bei einer reinen Rotation (ohne Translation) durch ihre Winkelgeschwindigkeit und den Abstandsradius berechnet.

$$W_{rot} \cong \frac{1}{2}\omega^2 \sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$$

Hierbei bedeutet der Zusatz $\perp$, dass nur der senkrechte Abstand zur Drehachse zählt.

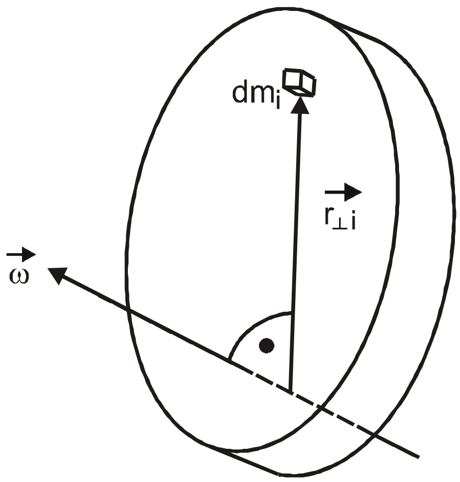

Abbildung 6.4: *Beschreibung des Trägheitsmoment*

Bei einem kontinuierlichen Körper wird von der Summe zum Integral übergegangen. Hierzu wird der folgende Grenzübergang vollzogen.

$$\Delta m_i \rightarrow dm_{(i)} \rightarrow dm$$

Das infinitesimale Massenelement wird durch sein Volumenelement und seiner Dichte ρ beschrieben, damit man auch inhomogene Körper behandeln kann.

Def.: Spezifische Dichte: $\rho = \frac{dm}{dV}$

→ $W_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \int \rho(r) * r_\perp^2 * dV$

Ähnlich der kinetischen Energie erhalten wir einen Faktor für den dynamischen Anteil (v^2→ω^2) und einen Faktor für die Trägheit.

Definition: Trägheitsmoment J

$J = \int \rho(r) * r_\perp^2 dr$

Hieraus folgt.

$W_{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2$

Übersetzungsparallelen

- $W_{kin} \to W_{rot}$
- $v^2 \to \omega^2$
- $m = \int \rho(\vec{r}) * dV \to J = \int \rho(\vec{r}) * r_\perp^2 dV$

Erweiterung des Energiesatzes

Der kinetische Anteil der Energie wird aufgeteilt in den kinetischen Anteil der Translation und in den kinetischen Anteil der Rotation.

$W = W_{kin} + W_{rot} + W_{pot}$ → $W = \frac{m}{2}v^2 + \frac{J}{2}\omega^2 + W_{pot}$

Beispiel:

Ein Massenpunkt, eine Vollwalze und eine Hohlwalze mit dem Radius R rollen eine schiefe Ebene herunter. Die Massen sind für alle drei Körper gleich. Welche unterschiedlichen Endgeschwindigkeiten werden erreicht?

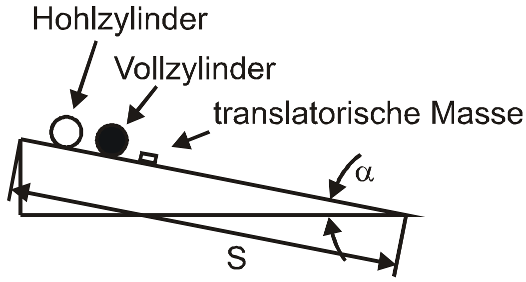

Abbildung 6.5: *Massen auf der schiefen Ebene*

Für alle drei Massen gilt der Energiesatz. Bei der translatorischen Masse muss nur die kinetische und potentielle Energie betrachtet werden, während bei den beiden Zylindern auch die Rotationsenergie hinzukommt. Die potentielle Energie vor dem Start berechnet sich einfach aus der Höhe der schiefen Ebene

Potentielle Energie der schiefen Ebene vor dem Start

$$W_{pot} = mgh = mg * \sin\alpha * s$$

Energiebetrachtung der rollenden Zylinder

$$W = \frac{m}{2}v^2 + \frac{J}{2}\omega^2 + mgh = const$$

Die Winkelgeschwindigkeit kann durch den Radius und der translatorischen Energie ausgedrückt werden.

$$\omega = \frac{v}{R} \rightarrow W = \frac{m}{2}v^2 + \frac{J}{2R^2}v^2 + mgh = const$$

Durch Umformen der Gleichung nach der Endgeschwindigkeit erhält man.

$$\rightarrow v_e = \sqrt{\frac{m}{m + \frac{J}{R^2}}(2g * s * \sin\alpha)}$$

Die Endgeschwindigkeit wird durch die Rotation gemindert, da nun ein zusätzlicher Freiheitsgrad für die Energie vorliegt, auf den sich die Anfangsenergie verteilt. Zur genauen Analyse muss noch das Trägheitsmoment bestimmt werden.

Trägheitsmoment des Hohlzylinders

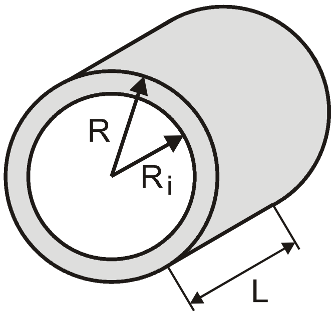

Abbildung 6.6: *Geometrie des Hohlzylinders mit*

Für die Berechnung des Trägheitsmoments des Hohlzylinder wurde angenommen, dass die Massen in der Außenwand gleichmäßig verteilt sind (ρ=const). Die Massen, die außen bei einem Körper liegen, liefern für das Trägheitsmoment den größten Beitrag. Für einen Hohlzylinder ergibt sich das folgende Trägheitsmoment.

$$J_{hohl} = m\frac{\left(R^2 + R_i^2\right)}{2}$$

Bei einem sehr dünnwandigen Zylinder unterscheidet sich der Innenradius kaum vom Außenradius.

$$R_i \cong R \rightarrow J_{hohl} = m\frac{\left(R^2 + R_a^2\right)}{2} \rightarrow J_{hohl} = mR^2$$

Trägheitsmoment des Vollzylinders

Die Masse des Vollzylinders soll auch hier wieder gleichmäßig verteilt sein. Das Trägheitsmoment kann direkt aus dem des Vollzylinders abgeleitet werden, indem der Innenradius zu gegen null geht.

$$R_i \to 0 \rightarrow J_{voll} = \frac{m}{2}R^2$$

Es soll nun für die drei Fälle, translatorische Masse, Hohl- und Vollzylinder, die Endgeschwindigkeit aus dem Trägheitsmoment berechnet werden.

Erinnerung

$$v_e = \sqrt{\frac{m}{m + \frac{J}{R^2}}\left(2g * s * \sin\alpha\right)}$$

Translatorische Masse

Die translatorische Masse zeichnet sich dadurch aus, dass keine Rotation betrachtet wird. Demzufolge kann auch das Trägheitsmoment vernachlässigt werden.

$$J_{trans} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{e\_trans} = \sqrt{2g * s * \sin\alpha}$$

Vollzylinder

$$J_{voll} = \frac{m}{2}R^2 \quad \rightarrow \quad v_{e\_voll} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{2}} * 2g * s * \sin\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} * \sqrt{2g * s * \sin\alpha}$$

Dünner Hohlzylinder

$$J_{voll} = mR^2 \quad \rightarrow \quad v_{e\_hohl} = \sqrt{\frac{1}{1+1} * 2g * s * \sin\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}} * \sqrt{2g * s * \sin\alpha}$$